Mühazirə 1
Tenzorlara dair sadə nümunələr

Tutaq ki, $V-R$ həqiqi ədədlər meydanı üzərində $n-$ ölçülü vektor fəzadır, $\{\vec{e}_i\}, i=\overline{1,n}$, -bu fəzanın müəyyən bazisidir. $\forall\vec{x}\in V$ vektoru üçün $\vec{x}=x^1\vec{e}_1+\cdots+x^n\vec{e}_n=x^i\vec{e}_i$ ayrılışı, digər $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazisi üçün isə

$$\vec{e}_{i'}=A_{i'}^i\vec{e}_i$$

keçid düsturu doğrudur, burada $\left(A_{i'}^i\right)-$ keçid matrisi olub qeyri-məxsusidir, $i-$ toplama, yaxud «Eynşteyn» indeksidir. Əgər $\vec{x}$ vektorunun $\vec{x}=x^{i'}\vec{e}_{i'}$ ayrılışı da məlumdursa, onda

$$x^{i'}=A_i^{i'}x^i \qquad (1)$$

çevirməsi yazılır, burada $\left(A_i^{i'}\right)-\left(A_{i'}^i\right)$ keçid matrisinin tərs matrisidir. (1) çevirməsinə vektorun *koordinatlarının çevirmə qanunu* deyilir.

2. Vektor arqumentli $\alpha:V\to R$ skalyar funksiyası:

1) $\forall\vec{x},\vec{y}\in V$ üçün

$$\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha(\vec{x})+\alpha(\vec{y});$$

2) $\forall\vec{x}\in V,\forall\lambda\in V$ üçün

$$\alpha(\lambda\vec{x})=\lambda\cdot\alpha(\vec{x})$$

şərtləri ödənildikdə *xətti funksiya* adlanır. Məsələn, $\forall\vec{x}\in V,\vec{x}=x^i\vec{e}_i$ vektoru üçün $\alpha(\vec{x})=x^1+x^2+x^3$ qaydası ilə təsir edən α funksiyası xətti funksiyadır.

V vektor fəzasında təsir edən bütün xətti funksiyalar çoxluğunu V^* ilə işarə edək. V^* çoxluğunda toplama və ədədə vurma əməlləri bu qayda ilə daxil edilir:

1) $\forall\alpha,\beta\in V^*,\forall\vec{x}\in V$ üçün

$$(\alpha+\beta)(\vec{x})=\alpha(\vec{x})+\beta(\vec{x});$$

2) $\forall\alpha\in V^*,\forall\vec{x}\in V,\forall\lambda\in R$ üçün

$$(\lambda\alpha)(\vec{x})=\lambda\cdot\alpha(\vec{x}).$$

Bu əməllər V^* çoxluğunu *kovenktor fəza* adlanan vektor fəzaya çevirirlər. V və V^* fəzaları *qoşma fəzalardır*. V^* kovektor fəzasının elementlərini *kovektorlar* adlandırırırlar və $\underset{\to}{\alpha},\underset{\to}{\beta},\underset{\to}{\gamma},...$ kimi işarə olunurlar. $\forall\underset{\to}{\alpha}\in V^*$ kovektoru üçün

$$\alpha_i=\underset{\to}{\alpha}(\vec{e}_i), i=\overline{1,n}$$

ədədləri $\underset{\to}{\alpha}$ *kovektorunun* $\{\vec{e}_i\}$ *bazisində koordinatları* adlanır.

V^* kovektor fəzasının

$$\underset{\to}{e}^j(\vec{e}_i)=\delta_i^j$$

şərtini ödəyən $\left\{\underset{\to}{e}^j\right\}, j=\overline{1,n}$ bazisinə $\{\vec{e}_i\}$ bazisi ilə *qarşılıqlı (qoşma) olan bazis* deyilir, burada δ_i^j – *Kroneker simvoludur*:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 1, & j = i. \end{cases}$$

$\underset{\rightarrow}{\alpha}$ kovektorunun $\{\vec{e}_i\}$ və $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazislərindəki α_i və $\alpha_{i'}$ koordinatları arasında aşağıdakı əlaqə doğrudur:

$$\alpha_{i'} = \underset{\rightarrow}{\alpha}(\vec{e}_{i'}) = \underset{\rightarrow}{\alpha}\left(A_{i'}^i \vec{e}_i\right) = A_{i'}^i \underset{\rightarrow}{\alpha}(\vec{e}_i) = A_{i'}^i \alpha_i ,$$

və ya

$$\alpha_{i'} = A_{i'}^i \alpha_i .$$

Mühazirə 2
Tenzorun koordinatlarla təyin olunması

Fərz edək ki, ixtiyari $t \in T_q^p V$ tenzoru verilmişdir, burada $V - n -$ölçülü vektor fəzadır. V vektor fəzasının hər hansı $\{\vec{e}_i\}, i = 1,2,...,n,$ bazisini götürək və bu bazislə qoşma olan bazisi $\left\{\underset{\rightarrow}{e}^j\right\}, j = 1,2,...,n,$ ilə işarə edək.

Tərif. t tenzorunun $\{\vec{e}_i\}$ bazisindəki koordinatları aşağıdakı qayda ilə təyin olunan ədədlər sisteminə deyilir:

$$t_{i_1 \cdots i_q}^{j_1 \cdots j_p} = t\left(\vec{e}_{i_1},...,\vec{e}_{i_q}, \underset{\rightarrow}{e}^{j_1},...,\underset{\rightarrow}{e}^{j_p}\right)$$

$1 \le i_a \le n, 1 \le j_b \le n, a = 1,2,...,q, b = 1,2,..., p$ olduğuna görə $t \in T_q^p V$ tenzorunun $\{\vec{e}_i\}$ bazisindəki koordinatlarının sayı n^{p+q} ədədinə bərabərdir.

Bir bazisdən digərinə keçdikdə tenzorun koordinatları dəyişir. Bu dəyişmənin xarakterini müəyyən edək. Tutaq ki, V vektor fəzasının $\{\vec{e}_i\}$ bazisindən fərqli digər $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazisi verilmişdir. $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazisinin qoşma olan bazisini $\left\{\underset{\rightarrow}{e}^{j'}\right\}$ ilə işarə edək. $t \in T_q^p V$ tenzorunun $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazisindəki koordinatları aşağıdakı ifadəyə malikdirlər:

$$t_{i_1' \cdots i_q'}^{j_1' \cdots j_p'} = t\left(\vec{e}_{i_1'},...,\vec{e}_{i_q'}, \underset{\rightarrow}{e}^{j_1'},...,\underset{\rightarrow}{e}^{j_p'}\right). \qquad (1)$$

Məlumdur ki, $\{\vec{e}_i\}$ bazisindən $\{\vec{e}_{i'}\}$ bazisinə və $\left\{\underset{\rightarrow}{e}^j\right\}$ bazisindən $\left\{\underset{\rightarrow}{e}^{j'}\right\}$ bazisinə keçid uyğun olaraq,

$$\vec{e}_{i'} = A_{i'}^i \vec{e}_i , \qquad (2)$$

$$\underset{\rightarrow}{e}^{j'} = A_j^{j'} \underset{\rightarrow}{e}^j \qquad (3)$$

düsturları ilə verilir. (1) bərabərliyinin sağ tərəfində (2), (3) düsturlarını və xəttilik şərtlərini nəzərə alaq:

$$t_{i_1' \cdots i_q'}^{j_1' \cdots j_p'} = t\left(A_{i_1'}^{i_1}\vec{e}_{i_1},...,A_{i_q'}^{i_q}\vec{e}_{i_q}, A_{j_1}^{j_1'}\underset{\rightarrow}{e}^{j_1},...,A_{j_p}^{j_p'}\underset{\rightarrow}{e}^{j_p}\right) =$$

$$= A_{i_1'}^{i_1} \cdots A_{i_q'}^{i_q} A_{j_1}^{j_1'} \cdots A_{j_p}^{j_p'}\, t\left(\vec{e}_{i_1},...,\vec{e}_{i_q}, \underset{\rightarrow}{e}^{j_1},...,\underset{\rightarrow}{e}^{j_p}\right) =$$

$$= A_{i_1'}^{i_1} \cdots A_{i_q'}^{i_q} A_{j_1}^{j_1'} \cdots A_{j_p}^{j_p'}\, t_{i_1 \cdots i_q}^{j_1 \cdots j_p} ,$$

və ya

$$t^{j_1'\cdots j_p'}_{i_1'\cdots i_q'} = A^{i_1}_{i_1'}\cdots A^{i_q}_{i_q'}A^{j_1'}_{j_1}\cdots A^{j_p'}_{j_p}\,t^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_q}. \tag{4}$$

(4) düsturlarına bir vektor bazisindən digərinə keçdikdə (p,q) *tipli tenzorun koordinatlarının çevirmə düsturları* deyilir. (4) düsturlarından aydın olur ki, $t\in T^1_0V$ tenzorunun koordinatları

$$t^{j'} = A^{j'}_j t^j$$

qaydası, yəni vektorun koordinatlarının çevirmə qanunu ilə (bax mühazirə 2, (1) düsturu), $t\in T^0_1V$ tenzorunun koordinatları isə

$$t_{i'} = A^i_{i'}t_i$$

qaydası, yəni kovektorun koordinatlarının çevirmə qanunu ilə (bax mühazirə 1, (2) düsturu) dəyişirlər. Buradan $(1,0)$ tipli tenzorun vektor, $(0,1)$ tipli tenzorun isə kovektor olması bilavasitə alınır.

Mühazirə 3
Tenzorun invariant təyin olunması

Tutaq ki, $V - R$ həqiqi ədədlər meydanı üzərində $n-$ölçülü vektor fəzadır, V^* isə V vektor fəzasına qoşma olan kovektor fəzadır. q sayda $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q\in V$ vektor və p sayda $\underrightarrow{\eta}^1,\ldots,\underrightarrow{\eta}^p\in V^*$ kovektor arqumentlərindən asılı olan skalyar

$$z = t\left(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q,\underrightarrow{\eta}^1,\ldots,\underrightarrow{\eta}^p\right) \tag{1}$$

funksiyasını təyin edək. (1) funksiyası arqumentlərinin hər birinə nəzərən xəttilik şərtlərini ödədikdə *polixətti funksiya* adlanır. Məsələn, 1-ci vektor arqumentinə görə xəttilik şərtləri belə yazılır:

$$t\left(\vec{v}_1'+\vec{v}_1'',\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_q,\underrightarrow{\eta}^1,\ldots,\underrightarrow{\eta}^p\right) = t\left(\vec{v}_1',\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_q,\underrightarrow{\eta}^1,\ldots,\underrightarrow{\eta}^p\right)+$$
$$+\,t\left(\vec{v}_1'',\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_q,\underrightarrow{\eta}^1,\ldots,\underrightarrow{\eta}^p\right),$$
$$t\left(k\cdot\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_q,\underrightarrow{\eta}^1,\ldots,\underrightarrow{\eta}^p\right) = k\cdot t\left(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_q,\underrightarrow{\eta}^1,\ldots,\underrightarrow{\eta}^p\right).$$

(1) polixətti funksiyasına həmçinin V vektor fəzası üzərində tipi (p,q) olan ($p\ge 0, q\ge 0$), yaxud p dəfə kontravariant və q dəfə kovariant *tenzor* deyilir. $s = p+q$ ədədi tenzorun valentliyi adlanır. Məsələn, valentliyi 2 olan tenzorlar $(2,0),(0,2)$ və $(1,1)$ tipli tenzorlardır. Tenzorlara dair nümunələrə baxaq.

1) (1,0) tipli $t\left(\underrightarrow{\eta}\right)$ tenzoru V vektor fəzasının vektorudur.

2) (0,1) tipli $t(\vec{v}_1)$ tenzoru V^* kovektor fəzasının kovektorudur.

3) (1,1) tipli tenzor $t(\vec{v},\underrightarrow{\eta})$ polixətti funksiyası ilə verilir və *afinor* adlanır.

V vektor fəzası üzərində təyin olunan bütün (p,q) tipli tenzorlar çoxluğu $T_q^p V$ ilə işarə olunur.

Mühazirə 4
Tenzorların xətti fəzası

Tenzorlar üzərində aparılan əməlləri qeyd edək.

1^0. $t_1, t_2 \in T_q^p V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzorlardırsa, onda bu tenzorların $t_1 + t_2$ *cəmi*

$$(t_1 + t_2)\left(\vec{v}_1,...,\vec{v}_q,\underrightarrow{\eta}^1,...,\underrightarrow{\eta}^p\right) = t_1\left(\vec{v}_1,...,\vec{v}_q,\underrightarrow{\eta}^1,...,\underrightarrow{\eta}^p\right) +$$
$$+ t_2\left(\vec{v}_1,...,\vec{v}_q,\underrightarrow{\eta}^1,...,\underrightarrow{\eta}^p\right)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q \in V$, $\underrightarrow{\eta}^1,\ldots,\underrightarrow{\eta}^p \in V^*$.

Qeyd. Yalnız eyni tipli tenzorları toplamaq mümkündür.

2^0. $t \in T_q^p V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzor, k ixtiyari həqiqi ədəddirsə, onda t tenzorunun k ədədinə $k \cdot t$ *hasili*

$$(k \cdot t)\left(\vec{v}_1,...,\vec{v}_q,\underrightarrow{\eta}^1,...,\underrightarrow{\eta}^p\right) = k \cdot t\left(\vec{v}_1,...,\vec{v}_q,\underrightarrow{\eta}^1,...,\underrightarrow{\eta}^p\right)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q \in V$, $\underrightarrow{\eta}^1,\ldots,\underrightarrow{\eta}^p \in V^*$.

Göründüyü kimi, tenzorun ədədə hasili zamanı tip dəyişmir. Asanlıqla yoxlamaq olur ki, $T_q^p V$ çoxluğu (p,q) tipli tenzorların toplanması və ədədə hasili əməllərinə görə vektor fəza və ya xətti fəza təyin edir.

Mühazirə 5
Tenzorlar üzərində cəbri əməllər. Xətti kombinasiya və bükülmə

1^0. $t_1 \in T_{q_1}^{p_1} V,\ t_2 \in T_{q_2}^{p_2} V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzorlardırsa, onda bu tenzorların $t_1 \otimes t_2$ *hasili*

$$(t_1 \otimes t_2)\left(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{q_1}\vec{v}_{q_1+1},...,\vec{v}_{q_1+q_2},\underrightarrow{\eta}^1,...,\underrightarrow{\eta}^{p_1},\underrightarrow{\eta}^{p_1+1},...,\underrightarrow{\eta}^{p_1+p_2}\right) =$$
$$= t_1\left(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{q_1},\underrightarrow{\eta}^1,...,\underrightarrow{\eta}^{p_1}\right) \cdot t_2\left(\vec{v}_{q_1+1},...,\vec{v}_{q_1+q_2},\underrightarrow{\eta}^{p_1+1},...,\underrightarrow{\eta}^{p_1+p_2}\right),$$

burada $\vec{v}_a \in V, a = 1,2,...,q_1 + q_2, \underrightarrow{\eta}^b \in V^*, b = 1,2,..., p_1 + p_2$.

Göründüyü kimi, $t_1 \otimes t_2$ -$(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ tipli tenzordur.

Tenzorların hasili əməlinin aşağıdakı xassələri vardır:

$a)$ $t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3) = (t_1 \otimes t_2) \otimes t_3$;

$b)$ $(t_1 + t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes t_3 + t_2 \otimes t_2$;

$c)$ $(kt_1) \otimes t_2 = t_1 \otimes (kt_2) = k(t_1 \otimes t_2)$.

Qeyd. Tenzorların hasili əməli yerdəyişmə (kommutativ-lik) xassəsinə malik deyil, yəni

$$t_1 \otimes t_2 \neq t_2 \otimes t_1.$$

2^0. Tutaq ki, $t \in T_q^p V - V$ vektor fəzası üzərində verilmiş tenzordur və $p > 0, q > 0.$ t tenzorunun m saylı vektor və k saylı kovektor arqumentlərinə görə *bükülməsi* dedikdə aşa-ğıdakı kimi təyin olunan $tr_m^k t \in T_{q-1}^{p-1} V$ tenzoru başa düşülür:

$$tr_m^k t\left(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{q-1},\underset{\rightarrow}{\eta}^1,...,\underset{\rightarrow}{\eta}^{p-1}\right)=$$

$$=t\left(\vec{v}_1,...,\vec{v}_{m-1},\vec{e}_i,\vec{v}_{m+1},...,\vec{v}_{q-1},\underset{\rightarrow}{\eta}^1,...,\underset{\rightarrow}{\eta}^{k-1},\underset{\rightarrow}{e}^i,\underset{\longrightarrow}{\eta}^{k+1},...,\underset{\rightarrow}{\eta}^{p-1}\right),$$

burada $\{\vec{e}_i\}, i = 1,2,...,n - V$ vektor fəzasının bazisidir, $\left\{\underset{\rightarrow}{e}^j\right\}-$ onunla qoşma olan bazisdir və i toplama indeksi olbuğundan bu indeksə görə cəmləmə aparılır. Aydındır ki, bükülmə əməli vektor və ya kovektor arqumentlərindən hər hansı biri qurtarana qədər ardıcıl olaraq aparıla bilər.

Mühazirə 6

Tenzor hasili. Simmetrikləşmə və çəp-simmetrikləşmə

Tutaq ki, $S_q - q$ dərəcəli əvəzləmələr qrupudur. S_q qrupunun $T_q^0 V$ tenzorlar fəzasında təsirini

$$\forall \sigma \in S_q,\ \forall t \in T_q^0 V,\ \ \sigma t\left(\vec{v}_1,...,\vec{v}_q\right) = t\left(\vec{v}_{\sigma(1)},...,\vec{v}_{\sigma(q)}\right)$$

düsturu ilə təyin edirik.

$t \in T_q^0 V$ tenzorunun *simmetrikləşməsi* dedikdə aşağıdakı kimi təyin olunan $Sym\, t \in T_q^0 V$ tenzoru başa düşülür:

$$Sym\, t = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma \in S_q} \sigma t.$$

Məsələn, $t \in T_2^0 V$ tenzorunun simmetrikləşməsi

$$Sym\, t(\vec{v},\vec{w}) = \frac{1}{2!}\left(t(\vec{v},\vec{w}) + t(\vec{w},\vec{v})\right)$$

şəklində, $h \in T_3^0 V$ tenzorunun simmetrikləşməsi isə

$$Sym\, t(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = \frac{1}{3!}\left(h(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) + h(\vec{w},\vec{u},\vec{v}) + h(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) +\right.$$

$$\left. + h(\vec{w},\vec{v},\vec{u}) + h(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) + h(\vec{u},\vec{w},\vec{v})\right)$$

şəklində aparılır.

Qeyd edək ki, simmetrikləşmə əməli vektor və kovektor arqumentlərinin bir qrupuna da tətbiq oluna bilər. Məsələn, $t \in T_3^2 V$ tenzorunun 1-ci və 3-cü vektor arqumentlərinə görə simmetrikləşməsi belə yazılır:

$$Sym_{1,3}\,t\left(\vec{v},\vec{w},\vec{u},\underset{\rightarrow}{\eta},\underset{\rightarrow}{\xi}\right)=\frac{1}{2!}\left(t\left(\vec{v},\vec{w},\vec{u},\underset{\rightarrow}{\eta},\underset{\rightarrow}{\xi}\right)+t\left(\vec{u},\vec{w},\vec{v},\underset{\rightarrow}{\eta},\underset{\rightarrow}{\xi}\right)\right).$$

Tərif. $t\in T_q^0V$ tenzoru $\forall\sigma\in S_p$ əvəzləməsi üçün $\sigma t=t$ şərtini ödədikdə *simmetrik tenzor* adlanır. Tərifdən aydın olur ki, əgər $t\in T_q^0V$ - simmetrik tenzordursa, onda $Sym\,t=t$. Digər tərəfdən, $t\in T_3^2V$ tenzoru üçün $Sym_{1,3}\,t=t$ yazılışı onu göstərir ki, bu tenzor 1-ci və 3-cü vektor arqumentlərinə görə simmetrikdir.

6^0. $\sigma\in S_q$ əvəzləməsinin işarəsini $Sgn\,\sigma$ ilə işarə edək. Aydındır ki, $Sgn\,\sigma$ cüt əvəzləmələr üçün 1-ə, tək əvəzləmələr üçün isə -1-ə bərabərdir.

$t\in T_q^0V$ tenzorunun *çəp-simmetrikləşməsi* , yaxud *alternasiyası* aşağıdakı kimi təyin olunan $Al\,t\in T_q^0V$ tenzoru na deyilir:

$$Al\,t=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q}Sgn\,\sigma(\sigma t).$$

Tərifdən görünür ki, $t\in T_2^0V$ tenzorunun çəp-simmetrikləşməsi

$$Al\,t(\vec{v},\vec{w})=\frac{1}{2!}\left(t(\vec{v},\vec{w})-t(\vec{w},\vec{v})\right)$$

şəklində, $h\in T_3^0V$ tenzorunun çəp-simmetrikləşməsi isə

$$Al\,t(\vec{v},\vec{w},\vec{u})=\frac{1}{3!}\left(h(\vec{v},\vec{w},\vec{u})+h(\vec{w},\vec{u},\vec{v})+h(\vec{u},\vec{v},\vec{w})-\right.$$
$$\left.-h(\vec{w},\vec{v},\vec{u})-h(\vec{v},\vec{u},\vec{w})-h(\vec{u},\vec{w},\vec{v})\right)$$

şəklində aparılır.

Çəp-simmetrikləşmə əməlini də vektor və kovektor arqumentlərinin bir qrupuna tətbiq etmək mümkündür. Məsələn, $t\in T_3^2V$ tenzorunun 2-ci və 3-cü vektor arqumentlərinə görə çəp-simmetrikləşməsi belə yazılır:

$$Al_{2,3}\,t\left(\vec{v},\vec{w},\vec{u},\underset{\rightarrow}{\eta},\underset{\rightarrow}{\xi}\right)=\frac{1}{2!}\left(t\left(\vec{v},\vec{w},\vec{u},\underset{\rightarrow}{\eta},\underset{\rightarrow}{\xi}\right)-t\left(\vec{v},\vec{u},\vec{w},\underset{\rightarrow}{\eta},\underset{\rightarrow}{\xi}\right)\right).$$

Tərif. $t\in T_q^0V$ tenzoru $\forall\sigma\in S_p$ əvəzləməsi üçün $Sgn\sigma\cdot\sigma t=t$ şərtini ödədikdə *çəp-simmetrik tenzor* adlanır. Tərifə görə, əgər $t\in T_q^0V$ - çəp-simmetrik tenzordursa, onda $Al\,t=t$. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, simmetrik tenzorun alternasiyası və çəp-simmetrik tenzorun simmetrikləşməsi sıfra bərabərdir.

Mühazirə 7
Metrik tenzor. İndekslərin endirilməsi və qaldırılması

Tutaq ki, R meydanı üzərində təyin olunmuş $n-$ölçülü V vektorlar fəzası verilmişdir, V^* isə uyğun kovektor fəzasıdır.

Tərif. V vektorlar fəzası üzərində təyin olunmuş metrik və ya əsas tenzor dediukdə aşağıdakı xassələrə malik $g \in T_2^0(V)$ tenzoru başa düşülür:

1) g simmetrik tenzordur, yəni $g_{ij} = g_{ji}$;

2) g tenzorunun koordinatlarından düzələn matris qeyri-məxsusidir, yəni $\det(g_{ij}) \neq 0$.

2) şərti göstərir ki, (g_{ij}) matrisinin tərsi vardır. Tərs matrisin elementləri aşağıdakı münasibəti ödəyirlər:

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k = \begin{cases} 1, k = i \\ 0, k \neq i \end{cases}. \tag{1}$$

(1) bərabərliyindən müəyyən olunur ki, g^{jk} kəmiyyətləri (2,0) tipli tenzor təyin edirlər. Bu tenzora metrik tenzorun tərs tenzoru deyilir. Metrik tenzor və onun tərs tenzoru indekslərin endirilməsi və qaldırılması əməllərini aparmağa imkan verirlər.

Tutaq ki, $\forall \vec{x} \in V, \vec{x} = x^i \vec{e}_i$ vektoru verilmişdir. Aşağıdakı qayda ilə n sayda x_j həqiqi ədədlərini təyin edək:

$$x_j = g_{ij} x^i.$$

Bu halda deyirlər ki, i indeksi endirilmişdir.

$\forall \underset{\to}{\alpha} \in V^*, \alpha_i = \underset{\to}{\alpha}(\vec{e}_i)$ kovektoruna baxaq. Aşağıdakı qayda ilə n sayda α^j həqiqi ədədlərini təyin edək:

$$\alpha^j = g^{ji} \alpha_i.$$

Bu halda deyirlər ki, i indeksi qaldırılmışdır.

Mühazirə 8
Çəp-simmetrik tenzorlar fəzası

Simmetrikləşmə və alternasiya əməllərini təyin etmək üçün eyni xarakterli dəyişənlərə malik polixətti funksiyaları götürmək lazımdır. Məsələn, $t(\vec{x}, \vec{y})$ bixətti funksiyasına baxaq. $t(\vec{y}, \vec{x})$-in də bixətti olacağı və ümumi halda $t(\vec{x}, \vec{y}) \neq t(\vec{y}, \vec{x})$ olacağı aşkardır. Yeni

$$t'(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda t(\vec{x}, \vec{y}) + \mu t(\vec{y}, \vec{x}), \;\; \lambda, \mu \in R \tag{1.35}$$

bixətti funksiyasını təyin edək (bunu yoxlayın). Beləliklə, λ və μ-yə müxtəlif qiymətlər versək, sonsuz sayda yeni tenzorlar alınar. Bu tenzorlardan birini $\lambda = \mu = \frac{1}{2!}$ qəbul etməklə seçə bilərik. Alınan bixətti funksiyaya uyğun gələn tenzora $t(\vec{x},\vec{y})$ tenzorunun simmetrikləşməsi deyilir və $Sim\, t$ şəklində yazılır. Tərifdən alınır ki,

$$Sim\, t(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2!}(t(\vec{x},\vec{y}) + t(\vec{y},\vec{x})).$$

Dəyişənlərin sayı 3-ə bərabər olduqda, məsələn, $t(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ tenzorunun simmetrikləşməsi

$$Sim\, t(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = \frac{1}{3!}(t(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) + t(\vec{y},\vec{z},\vec{x}) + t(\vec{z},\vec{x},\vec{y}) + \\ + t(\vec{y},\vec{x},\vec{z}) + t(\vec{x},\vec{z},\vec{y}) + t(\vec{z},\vec{y},\vec{x}))$$

şəklində yazılır. (1.35) tenzorlarından birini isə $\lambda = -\mu = \frac{1}{2!}$ qəbul etməklə, yəni

$$\frac{1}{2!}(t(\vec{x},\vec{y}) - t(\vec{y},\vec{x}))$$

şəklində seşə bilərik. Buna uyğun gələn tenzora isə $t(\vec{x},\vec{y})$ tenzorunun çəp-simmetrikləşməsi və ya alternasiyası deyilir və $Alt\, t(\vec{x},\vec{y})$ kimi işarə olunur. Beləliklə,

$$Alt\, t(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2!}(t(\vec{x},\vec{y}) - t(\vec{y},\vec{x}))$$

yazılır. Oxşar qayda ilə,

$$Alt\, t(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = \frac{1}{3!}(t(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) + t(\vec{y},\vec{z},\vec{x}) + t(\vec{z},\vec{x},\vec{y}) - \\ - t(\vec{y},\vec{x},\vec{z}) - t(\vec{x},\vec{z},\vec{y}) - t(\vec{z},\vec{y},\vec{x}))$$

şəklində yaza bilərik, burada "+" və "-" işarələri $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ dəyişənlər sistemindəki permutasiyaların işarələridir.

Simmetrikləşmə və alternasiya əməlləri $\forall(0,p)$ və ya $\forall(q,0)$ tipli tenzorlar üçün də oxşar qayda ilə tətbiq edilir. Bəzi hallarda bu əməlləri bütün dəyişənlər üçün deyil, onların bir qrupu üçün aparılır. Məsələn,

$$Alt\, t(\vec{x},\breve{\vec{y}},\vec{z}) = \frac{1}{3!}(t(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) - t(\vec{z},\vec{y},\vec{x}))$$

olduğunu yaza bilərik, burada $\breve{\vec{y}}$ simvolikası onu göstərir ki, $\vec{y}$ vektoru $Alt\, t$ əməlinə daxil deyildir.

Tərif 1.4.2. Əgər $Sim\, t = t\ (Alt\, t = t)$ olarsa, onda t tenzoruna simmetrik (çəp-simmetrik) tenzor deyilir.

Məsələn, (0,2) tipli tenzorun simmetriklik şərti

$$t(\vec{x},\vec{y}) = t(\vec{y},\vec{x}) \qquad (1.36)$$

şəklindədir. Doğrudan da, (1.36) bərabərliyinə görə,

$$Sim\, t(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2!}(t(\vec{x},\vec{y}) + t(\vec{y},\vec{x})) = t(\vec{x},\vec{y})$$

olur. Tərsinə,

$$Sim\,t(\vec{x},\vec{y}) = t(\vec{x},\vec{y})$$

bərabərliyindən

$$t(\vec{x},\vec{y}) = Sim\,t(\vec{x},\vec{y}) = Sim\,t(\vec{y},\vec{x}) = t(\vec{y},\vec{x})$$

nəticəsinə gəlmiş oluruq.

Eyni qayda ilə (0,2) tipli tenzorun çəp-simmetriklik şərti

$$t(\vec{x},\vec{y}) = -t(\vec{y},\vec{x}) \tag{1.37}$$

kimi yazılır. (0,3) tipli tenzorun simmetriklik və çəp-simmetriklik şərtləri isə, uyğun olaraq,

$$\begin{aligned} t(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) &= t(\vec{y},\vec{z},\vec{x}) = t(\vec{z},\vec{x},\vec{y}) = \\ &= t(\vec{y},\vec{x},\vec{z}) = t(\vec{x},\vec{z},\vec{y}) = t(\vec{z},\vec{y},\vec{x}) \end{aligned} \tag{1.38}$$

və

$$\begin{aligned} t(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) &= t(\vec{y},\vec{z},\vec{x}) = t(\vec{z},\vec{x},\vec{y}) = \\ &= -t(\vec{y},\vec{x},\vec{z}) = -t(\vec{x},\vec{z},\vec{y}) = -t(\vec{z},\vec{y},\vec{x}) \end{aligned} \tag{1.39}$$

şəklindədir.

Mühazirə 9

Xarici diferensial formalar cəbri

Afin fəzanın $U \subset \mathrm{A}^n$ oblastında xarici diferensial $p-$ forma dedikdə U oblastında təyin olunmuş p dərəcəli xarici formaların $\omega_x(v_1,...,v_p)$ meydanı başa düşülür. Koordinatlarda

$$\omega = \sum_{*} \omega_{i_1 \cdots i_p}(x) e^{i_1} \Lambda \cdots \Lambda e^{i_p}$$

və ya $T_x^*\mathrm{A}$ fəzasında bazis kovektorlarını dx^i kimi işarə etmək qəbul olunduğundan

$$\omega = \sum_{*} \omega_{i_1 \cdots i_p}(x) dx^{i_1} \Lambda \cdots \Lambda dx^{i_p} \tag{2.1}$$

yazılışı doğrudur.

Xüsusi halda, skalyar meydana sıfır dərəcəli forma kimi baxılmalıdır. $\omega = \omega_i(x)dx^i$ xarici diferensial 1-formasına (yəni kovektor meydanına) Pfaf forması da deyilir. Xarici formalar üzərində aparılan bütün əməllər təbii olaraq afin fəzada xarici diferensial formalara tətbiq olunur və bu əməllər nöqtələr üzrə aparılır.

Mühazirə 10

Xarici diferensiallama əməli

Xarici diferensial formalar üzərində yeni bir əməl-xarici diferensiallama aparılır. Xarici diferensiallama xarici $p-$forma-ya $(p+1)-$formanı qarşı qoyan elə $d:\omega\rightarrow d\omega$ inikasına deyi-lir ki:

a) $d-K$-xətti inikasdır:

$$d(\lambda\omega+\mu\theta)=\lambda d\omega+\mu d\theta;$$

b) φ funksiyası üçün $d\varphi$ xarici diferensialı adi difensialla üst-üstə düşür;

c) Əgər $\omega-p-$forma, $\theta-q-$formadırsa, onda

$$d(\omega\Lambda\theta)=d\omega\Lambda\theta+(-1)^p\omega\Lambda d\theta;$$

d) İstənilən ω forması üçün

$$d^2\omega=0.$$

Bu xassələr xarici diferensiallamanı bütünlüklə xarakterizə edir. Tərifdən aydın olur ki, lokal şəkildə, yəni koordinatlarda

$$d\omega=\sum_{*}d\omega_{i_1\cdots i_p}(x)dx^{i_1}\Lambda\cdots\Lambda dx^{i_p}.$$

$d\omega=0$ olduqda ω qapalı xarici diferensial forma adlanır. Əgər $\omega=d\theta$ şərtini ödəyən θ xarici forması vardırsa, deyəcəyik ki, ω dəqiq xarici diferensial formadır. d) xassəsi onu göstərir ki, istənilən dəqiq diferensial forma qapalıdır.

<u>Misal 1.</u> A^2 müstəvisi üzərində verilmiş

$$\omega=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

xətti diferensial forması üçün yaza bilərik:

$$d\omega=dP\Lambda dx+dQ\Lambda dy=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\Lambda dy.$$

$d\omega-$dərəcəsi 2 olan xarici diferensial formadır. Aydındır ki, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ olduqda ω qapalı formadır.

Misal 2. Tutaq ki, $\omega - 3$-ölçülü psevdo-Evklid fəzada xarici 2-formadır:

$$\omega = \omega_{12} dx^1 \Lambda dx^2 + \omega_{13} dx^1 \Lambda dx^3 + \omega_{23} dx^2 \Lambda dx^3.$$

Xarici diferensiallamaqla alarıq:

$$d\omega = \left(\partial_3 \omega_{12} - \partial_2 \omega_{13} + \partial_1 \omega_{23}\right) dx^1 \Lambda dx^2 \Lambda dx^3.$$

Mühazirə 11

Tenzor meydanları, onların diferensialı. Kommutator

Tutaq ki, $V - K$ meydanı üzərində vektor fəzadır və A- $A, B, C, ...$ elementlərinə malik olan çoxluqdur. A çoxluğunun elementlərini nöqtələr adlandıraq. Əgər hər bir nizamlanmış $(A, B) \in$ A×A elementlər cütünə aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi ilə $v = \overrightarrow{AB} \in V$ vektorunu qarşı qoyan A×A $\to V$ inikası verilərsə, deyəcəyik ki, A$-K$ meydanı üzərində afin fəzadır:

1) İstənilən $A \in$ A nöqtəsi və istənilən $v \in V$ vektoru üçün elə yeganə $B \in$ A nöqtəsi vardır ki, $v = \overrightarrow{AB}$.

2) İstənilən $A, B, C \in$ A nöqtələri üçün Şall münasibəti doğrudur:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0.$$

$\dim V = n$ olduqda afin fəza $n -$ölçülü qəbul olunur və A^n kimi işarə edilir. $V -$ A^n afin fəzası üçün yönəldici vektor fəza adlandırılır.

İxtiyari qaydada seçilmiş $O \in$ A nöqtəsini qeyd edək. Bu halda $\forall A \in$ A nöqtəsi üçün bu nöqtənin radius-vektoru adlandı-rılan $x = \overrightarrow{OA}$ vektoru birqiymətli təyin olunur. $V -$də $\{e_i\}$ bazi-sini seçməklə $x = x^i e_i$ ayrılışını alarıq. x^i ədədlərinə $A(x)$ nöqtə-sinin $\{O, e_i\}$ reperində afin (və ya dekart) koordinatları deyilir.

V yönəldici vektor fəzası psevdo-Evklid vektor fəzası ol-duqda A – afin-psevdo-Evklid (və ya psevdo-Evklid) fəzası adlandırılır.

A^n afin fəzasının nöqtəsində T_x toxunan fəzası başlanğı-cı bu nöqtədə olan bütün vektorların əmələ gətirdiyi eyni ölçülü
vektor fəzadır. Müxtəlif nöqtələrdəki toxunan fəzalar öz araların-da paralel köçürmə vasitəsilə təbii olaraq eyniləşdirilə bilər.

$U \in$ A^n oblastını nəzərdən keçirək. Əgər U oblastının hər bir nöqtəsinə bu nöqtədəki toxunan fəzada (p, q) tipli tenzo-ru qarşı qoyan $x \to t_x$ inikası verilərsə, deyəcəyik ki, U oblastın-da (p, q) tipli t tenzor meydanı verilmişdir. Başqa sözlə, bu hal-da arqumentləri T_x və T_x^*

fəzalarından olan və həm də nöqtənin seçimindən asılı olan polixətti funksiyaya baxılır. Məsələn, $p=1,$
$q=2$ olduqda $t_x(\xi,u,v)$ polixətti funksiyası təyin olunur. Əgər $\{O,e_i\}-$ A^n-də dekart reperdirsə, onda

$$t_x = t^i_{jk}\left(x^1,\dots,x^n\right)\xi_i u^j v^k \,. \qquad (1.1)$$

U oblastında verilmiş $t^i_{jk}(x)$ funksiyalarına tenzor meydanının koordinatları deyilir. Əgər $t^i_{jk}(x)$ funksiyaları C^k sinfindən olan hamar funksiyalardırsa, deyəcəyik ki, $t-C^k$ sinfindən olan ha-mar tenzor meydanıdır. $t^i_{jk}=const$ olduqda , tenzor meydanı sabit tenzor meydanı adlanır.

Tenzorlar üzərində aparılan əməllər təbii olaraq nöqtələr üzrə aparılmaqla tenzor meydanlarına tətbiq edilir. Məsələn, eyni tipli t və s tenzorları üçün toplama əməli

$$(t+s)_x = t_x + s_x$$

şəklində aparılır.

Tenzor meydanları üzərində yeni bir əməl- diferensialla-ma əməli də aparılır. Polixətti funksiyanın diferensialını hesabla-dıqda nəzərə almaq lazımdır ki, dekart reperi halında vektor və kovektor arqumentlərinin koordinatları nöqtənin seçimindən asılı deyil. Məsələn, (1,1) tenzoru üçün

$$dt = dt^i_{jk}(x)\xi_i u^j v^k \,. \qquad (1.2)$$

Beləliklə, $dt-(1,2)$ tipli tenzor meydanıdır, dt^i_{jk} diferensialları onun dekart reperə nəzərən koordinatlarıdır.

<u>Misal 1</u>. A^n-də nöqtələrin radius-vektorlarının meydanı-na baxaq. Dekart reperə nəzərən $x=x^i e_i$ ayrılışını yaza bilərik. Diferensiallamaqla, koordinatları $dx^i = e^i(dx)$ olan $dx = dx^i e_i$ vektor meydanını alarıq.

Diferensialların aşağıdakı xassələri doğrudur:

a) Tenzor meydanının diferensialının sıfra bərabər olması üçün zəruri və kafi şərt onun sabit olmasıdır (istənilən dekart reperdə $t^i_{jk}=const$ olmasıdır);

b) Tenzor meydanlarının cəminin diferensialı onların dife-rensialları cəminə bərabərdir: $d(t+s)=dt+ds.$

c) Tenzor hasilinin diferensialı Leybnis qaydası ilə hesab-lanır: $d(t\otimes s)=dt\otimes s+t\otimes ds.$ Əgər xüsusi halda, $t-$ədəddirsə, onda $d(ts)=tds.$

d) Bükülmə əməli diferensiallama əməli ilə yerini dəyişə bilər:

$$tr^k_m(dt) = d\left(tr^k_m t\right)$$

Tenzor meydanının koordinatlarının diferensiallarını xü-susi törəmələrlə ifadə etməklə alarıq:

$$dt = \partial_s t^i_{jk}\xi_i u^j v^k dx^s, \qquad \partial_s t^i_{jk} = \frac{\partial t^i_{jk}}{\partial x^s}. \qquad (1.3)$$

Misal 1-i nəzərə almaqla belə bir nəticəyə gəlirik ki, $\partial_s t^i_{jk}$ funksi-yaları (1,3) tipli tenzor meydanının koordinatlarıdır. Bu tenzor meydanı t tenzor meydanının törəməsi adlanır və ∂t kimi işarə olunur. Ümumi halda (p,q) tipli tenzor meydanının törəməsi $(p,q+1)$ tipli tenzor meydanıdır. Törəməni verilmiş $w = w^i(x)e_i$ vektor meydanı ilə diferensiallama indeksi üzrə bükməklə yeni-dən (p,q) tipli

$$\partial_w t = tr_1^1(w \otimes \partial t) \tag{1.4}$$

tenzor meydanını alarıq. $\partial_w t - w$ vektor meydanı istiqaməti üzrə törəmə adlanır. Məsələn, $\partial_w t^i_{jk} = w^s \partial_s t^i_{jk}$.

Misal 2. Tutaq ki, $\varphi(x^1,...,x^n) - U \subset$ A^n oblastında təyin olunmuş skalyar meydandır. Onda $\partial_s \varphi - grad\varphi$ kimi işarə olu-nan və φ meydanının qradiyenti adlandırılan kovektor meydanı-nın koordinatlarıdır. Əgər yönəldici vektor fəza psevdo-Evklid fəzasıdırsa, onda indeksi qaldırmaqla, koordinatları ilə aşağıdakı kimi ifadə olunan vektor meydanını alarıq:

$$grad\varphi = (g^{ij}\partial_j \varphi)e_i.$$

φ potensial funksiya, $grad\varphi$ isə potensial vektor meydanı adlanır. İstiqamət üzrə törəmə skalyar hasilin köməyi ilə ifadə oluna bilər:

$$\partial_w \varphi = w^i(x)\partial_i \varphi = g(w, grad\varphi).$$

Misal 3. Tutaq ki, $\xi -$kovektor meydanıdır. $\partial\xi$ törəmə-sinin alternasiyasını aparaq və nəticəni 2-yə vuraq:

$$rot\xi = 2 \cdot Al(\partial\xi).$$

$rot\xi -$koordinatları $S_{ij} = \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i$ olan tenzor meydanıdır və ξ kovektor meydanının rotasiyası adlanır.

Misal 4. Tutaq ki, $v -$vektor meydanıdır. Onun törəməsi koordinatları $\partial_j v^i$ olan $(1,1)$ tipli tenzor meydanıdır. Bu tenzor meydanının $tr(\partial v)$ izi $v -$nin divergensiyası adlandırılan invari-antdır. Psevdo-Evklid fəzada divergensiyanı

$$div\, v = \partial_i v^i = g^{ij}\partial_i v_j$$

şəklində yaza bilərik. Bu invariant sıfra bərabər olduqda $v -$ solenoidal vektor meydanı adlanır.

Tutaq ki, $v - U \subset$ A^n oblastında təyin olunmuş vektor meydanıdır. $v -$nin inteqral xətləri (və ya trayektoriyaları) dedikdə toxunan vektorları meydanın vektorları ilə üst-üstə dü-şən, yəni $\frac{dx}{dt} = v(x(t))$ münasibətini ödəyən $x = x(t)$ parametri-zasiya olunmuş əyriləri başa düşülür. Bu münasibəti koordinat-larla yazmaqla,

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(x^1(t),...,x^n(t)) \tag{1.5}$$

adi diferensial tənliklər sistemini alarıq. (1.5) sisteminin inteq-rallanması inteqral xətlərini təyin etməyə imkan verir.

Əgər $u, v-$verilmiş vektor meydanlarıdırsa, onda istiqa-mət üzrə törəmələrin

$$w = [u, v] = \partial_u v - \partial_v u \qquad (1.6)$$

fərqi yeni vektor meydanıdır. $[u, v]-$yə u və v vektor meydan-larının kommutatoru deyilir. $[u, v]$ kommutatorunun koordinat-ları aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$[u, v]^i = w^i = u^k \partial_k v^i - v^k \partial_k u^i.$$

Misal 5. Tutaq ki, vektor meydanı dekart koordinatlarda $v = x^1 e_1 + x^2 e_2$ ayrılışına malikdir. İnteqral xətlərini təyin edək. Bundan ötrü

$$\frac{dx^1}{dt} = x^1, \qquad \frac{dx^2}{dt} = x^2$$

diferensial tənliklər sistemini inteqrallayaq. Nəticədə $x^1 = c_1 e^t$, $x^2 = c_2 e^t$ və ya parametri yox etməklə $c_2 x^1 - c_1 x^2 = 0$ düz xətlər dəstəsini alarıq.

Misal 6. Müstəvi üzərində koordinatları ilə verilən $u = (x^1, x^2)$, $v = (1, x^1)$ vektor meydanlarının kommutatorunu tə-yin edək. Bu məqsədlə matris yazılışından istifadə etmək əlveriş-lidir. Beləliklə, aşağıdakıları yaza bilərik:

$$\begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 v^1 & \partial_2 v^1 \\ \partial_1 v^2 & \partial_2 v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \partial_1 u^1 & \partial_2 u^1 \\ \partial_1 u^2 & \partial_2 u^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

və ya

$$[u, v] = -e_1.$$

Qeyd edək ki, A^n fəzasında vektor meydanları xətti dife-rensial operatorlar kimi baxıla bilər:

$$v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n} = v^i \partial_i.$$

Bu halda bazis vektorları xüsusi diferensiallama operatorları ilə eyniləşdirilir: $e_i = \partial_i$. Vektor meydanının diferensiallanan φ funksiyasına təsiri $v(\varphi) = v^i(x)\partial_i \varphi$ funksiyasını təyin etmiş olur. Bu funksiya $\varphi-$nin v vektor meydanı istiqaməti üzrə törəməsi-dir: $v(\varphi) = \partial_v \varphi$.

Mühazirə 12

Afin rabitə. Mütləq diferensiallama və kovariant törəmə

A^n afin fəzasında $\left(x^i\right)$ dekart koordinatları ilə yanaşı $\left(u^i\right)$ əyrixətli koordinatlarından istifadə etmək daha əlverişlidir. Əyrixətli koordinatlar afin fəzanın müəyyən $U \subset A^n$ oblastında verilmiş və $\varphi : U \to R^n$ homeomorfizmini təyin edən n sayda $u^i = u^i\left(x^1,...,x^n\right)$ funksiyaları vasitəsilə daxil edilirlər. Bu halda deyirlər ki, A^n-də (U,φ) xəritəsi və ya koordinat sistemi veril-mişdir.Tərs inikas $x^i = x^i(u^1,...,u^n)$ funksiyaları ilə və ya

$$x\left(u^1,...,u^n\right) = x^i\left(u^1,...,u^n\right)e_i \qquad (3.1)$$

vektor-funksiyası ilə təyin olunur. (3.1) vektor funksiyasının C^2 sinfindən diferensiallanmasını nəzərdə tuturuq.

Əgər U oblastında birindən başqa qalan bütün əyrixətli koordinatları qeyd etsək, nəticədə bir arqumentin

$$x\left(u_0^1,...,u^k,...,u_0^n\right)$$

vektor-funksiyasını alarıq. Bu vektor-funksiya U oblastında $k-$cı koordinat xəttini təyin edir. Hər bir nöqtədə koordinat xətlərinin $\partial_k = \left(\partial_k x^i\right)e_i$ toxunan vektorları xətti asılı olmayan vektorlardır və $\left\|\partial_k x^i\right\|$ Yakobi matrisinin qeyri-məxsusiliyinə əsasən x nöqtəsi ilə bərabər $\{x, \partial_k\}$ təbii və ya natural reperini əmələ gətirirlər.

Tutaq ki, A^n xəritələr sistemi ilə örtülmüşdür. Onda istənilən xəritələr cütünün təyin oblastlarının $U \cap U'$ kəsiş-məsində koordinatların

$$u^i = f^i\left(u^{1'},...,u^{n'}\right)$$

çevrilməsi yaranmış olur, burada $f = \varphi \circ \varphi'^{-1} = \left\{f^1,..., f^n\right\}$-qeyri-məxsusi $P = \left\|P_{i'}^i\right\|$, $P_{i'}^i = \partial_{i'} u^i$ Yakobi matrisinə malik di-ferensiallanan funksiyalardır.

x nöqtəsinin sonsuz kiçik yerdəyişməsi zamanı təbii bazisin vektorları da dəyişirlər. Bu dəyişikliklər $dx, d\partial_k$ diferen-sialları ilə xarakterizə olunurlar. Qeyd olunan diferensialları $\{x, \partial_i\}$ reperinin vektorları üzrə ayıraq:

$$dx = du^i \partial_i, \quad d\partial_k = \omega_k^i \partial_i. \qquad (3.2)$$

(3.2) münasibətləri reperin hərəkət tənlikləri adlanır. $\omega_k^i\left(u^1,...,u^r, du^1,...,du^n\right)$– diferensialların xətti formalarıdır və rabitə formaları adlanırlar:

$$\omega_k^i(dx) = \Gamma_{jk}^i\left(u^1,...,u^n\right)du^j\ . \qquad (3.3)$$

Γ_{jk}^i funksiyalarına isə rabitə əmsalları deyilir. Rabitə əmsalları aşağı indekslərinə görə simmetrik olub, əyrixətli koordinatların çevrilməsi zamanı

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = P_i^{i'}\left(\Gamma_{jk}^i P_{j'}^j P_{k'}^k + \partial_{j'} P_{k'}^i\right) \qquad (3.4)$$

qanunu üzrə dəyişirlər. Dekart koordinatlar onunla xarakterizə olunurlar ki, bu koordinatlarda $\Gamma_{jk}^i = 0.$

Psevdo-Evklid fəzası halında metrik tenzorun $g_{ij}\left(u^1,...,u^n\right) = g\left(\partial_i, \partial_j\right)$ komponentlərini hesablamaq olar. Ra-bitə əmsalları bu komponentlərlə aşağıdakı düstur üzrə ifadə olunur və Kristoffel simvolları adlandırılırlar:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{is}\left(\partial_j g_{ks} + \partial_k g_{js} - \partial_s g_{jk}\right). \qquad (3.5)$$

<u>Misal 1.</u> E^2 Evklid müstəvisi üzərində $\left(x^1, x^2\right)$ dekart koordinatları ilə yanaşı, $x^1 = rCos\varphi,\quad x^2 = rSin\varphi$ münasibət-ləri ilə polyar koordinatları daxil edək. Yakobyanı hesablayaq: $J = \dfrac{\partial\left(x^1, x^2\right)}{\partial(r,\varphi)} = r$. Bu isə o deməkdir ki, polyar koordinatlar

$r > 0$ şərti daxilində $U = E^2 \setminus \{0{,}0\}$ oblastında təyin olunmuş-lar. Beləliklə, $J = 0$ şərtinin ödənildiyi $r = 0$ polyusu polyar koordinat sisteminin yeganə məxsusi nöqtəsidir. Koordinat şəbə-kəsi $r = c_1$ konsentrik çevrələrindən və $\varphi = c_2$ şüalarından təşkil olunmuşdur. (r,φ) nöqtəsində təbii reperin vektorları $\partial_1 = e(\varphi),\quad \partial_2 = rg(\varphi)$ vektorlarıdır. Rabitə əmsallarını hesab-layaq. $d\partial_k$ diferensiallarını təyin etməklə, alarıq:

$$d\partial_1 = g(\varphi)d\varphi,\quad d\partial_2 = g(\varphi)dr - re(\varphi)d\varphi.$$

Ona görə də reperin hərəkət tənlikləri

$$d\partial_1 = \frac{d\varphi}{r}\partial_2,\quad d\partial_2 = -rd\varphi\partial_1 + \frac{dr}{r}\partial_2$$

şəklindədirlər. Buradan aydın olur ki, polyar koordinat sistemində rabitə formaları üçün

$$\left\|\omega_k^i\right\| = \begin{bmatrix} 0 & -rd\varphi \\ \dfrac{d\varphi}{r} & \dfrac{dr}{r} \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

yazılışı doğrudur və sıfırdan fərqli rabitə əmsalları aşağıdakı-lardır:

$$\Gamma_{22}^1 = -r,\quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}.$$

Tutaq ki, $\left(u^i\right)$ əyrixətli koordinatları daxil edilən afin fəzanın $U \subset A^n$ oblastında hamar v vektor meydanı verilmiş-dir. v vektor meydanını $T_x A^n$ toxunan fəzasının $\{\partial_i\}$ təbii bazisi üzrə ayıraq: $v = v^i(x)\partial_i$. Reperin (3.2) hərəkət tənliklərini nəzərə alaraq, v vektor meydanının diferensialını hesablayaq:

$$dv = (dv^i + \omega_k^i v^k)\partial_i. \qquad (3.7)$$

Beləliklə, dv vektor meydanı

$$\nabla v^i = dv^i + \omega_k^i v^k \qquad (3.8)$$

koordinatlarına malikdir, başqa sözlə, $dv = (\nabla v^i)\partial_i$.

∇ diferensial operatoruna mütləq diferensial deyilir. Xü-susi halda, dekart koordinatlarda $\omega_j^i = 0$ olduğundan mütləq diferensial adi diferensialla üst-üstə düşür.

ξ kovektor meydanı halına baxaq. ξ meydanını $T_x^* A^n$ kotoxunan fəzanın bazisini təşkil edən və $du^i(\partial_j) = \delta_j^i$ qoşma-lıq şərtini ödəyən təbii $\left\{du^i\right\}$ koreperi üzrə ayıraq. Nəticədə $\xi = \xi_i(x)du^i$ xətti diferensial formasını alarıq. Diferensialı he-sablayaraq, koreperin (3.2) tənliklərinə ikili olan

$$d(du^i) = -\omega_k^i du^k \qquad (3.9)$$

hərəkət tənliklərini nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$d\xi = (d\xi_i - \xi_k\omega_i^k)du^i. \qquad (3.10)$$

$$\nabla\xi_i = d\xi_i - \xi_k\omega_i^k \qquad (3.11)$$

funksiyaları $d\xi$ kovektor meydanının koordinatlarıdır. Bura-dan aydın olur ki, ixtiyari tipli tenzorun dt diferensialı aşağıdakı ayrılışa malikdir:

$$dt = \left(\nabla t^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}\right) du^{j_1} \otimes \cdots \otimes du^{j_q} \otimes \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_p}, \qquad (3.12)$$

burada mütləq diferensial

$$\nabla t^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = dt^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} + \sum_{a=1}^{p} t^{i_1 \cdots m \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \omega^{i_p}_{m} - \sum_{b=1}^{q} t^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots m \cdots j_q} \omega^{m}_{j_b} \qquad (3.13)$$

ifadəsinə malikdir.

Misal 2. Tutaq ki, $v-$müstəvi üzərində vektor meydanı-dır. Polyar koordinatları seçək. Onda rabitə formalarının (3.6) ifadəsini nəzərə alaraq, (3.8) düsturundan dv meydanının koor-dinatları üçün yaza bilərik:

$$\nabla v^1 = dv^1 - rv^2 d\varphi, \quad \nabla v^2 = dv^2 + \frac{1}{r}\left(v^1 d\varphi + v^2 dr\right).$$

(3.13) bərabərliyinin sağ tərəfində $dt^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$ və ω^i_j xətti formalarını təbii koreperlə ifadə edək:

$$dt^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = \partial_k t^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} du^k, \qquad \omega^i_j = \Gamma^i_{kj} du^k.$$

Nəticədə

$$dt = \nabla_k t^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} du^k \otimes du^{j_1} \otimes \cdots \otimes du^{j_q} \otimes \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_p}$$

olduğunu alarıq, burada

$$\begin{aligned} \nabla_k t^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} &= \partial_k t^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} + \sum_{a=1}^{p} t^{i_1 \cdots m \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \Gamma^{i_a}_{km} - \\ &- \sum_{b=1}^{q} t^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots m \cdots j_q} \Gamma^{m}_{kj_b} \end{aligned} \qquad (3.14)$$

tenzor meydanının ∂t törəməsinin koordinatlarıdır.
(3.14) operatoruna kovariant törəmə operatoru deyilir. ∂t törəməsini verilmiş w vektor meydanı ilə bükməklə koordinat-ları

$$\nabla_w t^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = w^k \nabla_k t^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$$

olan istiqamət üzrə törəməni alarıq.
Diferensiallanan M çoxobrazlısı, bu çoxobraxlı üzərində hamar metrik tenzor meydanı, yəni $(0,2)$ tipli simmetrik və qeyri-məxsusi g tenzor meydanı verildikdə psevdo-Riman fəzası adlanır və (M,g) kimi işarə olunur. Bu fəzanın hər bir nöqtəsinin T_xM toxunan fəzası psevdo-Evklid fəzasıdır. Nəzər-də tutulur ki,

$$ds^2 = g_{ij}(x) du^i du^j \qquad (5.1)$$

diferensial kvadratik formasının siqnaturası baxılan oblastda sabitdir, burada $g_{ij}(x) = g(\partial_i, \partial_j) - g$ tenzorunun təbii reperə nəzərən komponentləridir. Əgər (5.1) forması müsbət-müəyyən olarsa, deyəcəyik ki, (M,g) Riman çoxobrazlısıdır. Bu halda T_xM Evklid fəzası olur.

(M,g) çoxobrazlısı üzərində aşağıdakı iki şərti ödəyən yeganə ∇ rabitəsi vardır:

1) bu rabitənin buruqluğu sıfra bərabərdir: $S=0$;
2) bu rabitədə metrik tenzor kovariant sabitdir: $\forall v$ vek-tor meydanı üçün

$$\nabla_v g = 0.$$

Yuxarıdakı qayda ilə təyin olunan ∇ rabitəsinə Riman rabitəsi deyilir. Riman rabitəsinin komponentləri təbii reperə nəzərən

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}\left(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}\right) \qquad (5.2)$$

düsturu ilə ifadə olunurlar, yəni Kristoffel simvollarıdır (bax § 3, (3.5) düsturu).

Metrik tenzorun varlığı psevdo-Evklid fəzasında olduğu kimi, vektor və kovektor meydanları arasında biyektiv uyğunluq yaratmağa imkan verir. Bu uyğunluq koordinatlarla indeksin endirilməsi və qaldırılması şəklində ifadə olunur:

$$v_i = g_{ij}v^j, \quad v^i = g^{ij}v_j. \qquad (5.3)$$

Məhz bu səbəbdən vektor meydanının rotasiyasından və kovektor meydanının divergensiyasından danışmaq olar:

$$\begin{aligned} (rot\ v)_{ij} &= 2g_{k[j}\nabla_{i]}v^k, \\ div\ v &= g^{ij}\nabla_i v_j. \end{aligned} \qquad (5.4)$$

İndekslərin endirilməsi və qaldırılması əməlləri istənilən tipli tenzor meydanlarına tətbiq oluna bilər.

Metrik tenzorun kovariant sabitliyinə əsasən, vektorların skalyar hasili paralel köçürmə zamanı saxlanılır. Başqa sözlə, paralel köçürmə zamanı toxunan fəzaların

$$\tau : T_x M \to T_{x(t)}M$$

xətti izomorfizmi izometriyadır.

(M, g) fəzasında geodezik xətlər izotrop və qeyri-izotrop ola bilər. Hər iki halda geodezik xəttin tənliyini

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k\left(u^m(s)\right)\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 0 \qquad (5.5)$$

şəklində yazmaq olar, burada $s-$ kanonik parametrdir.

Bir sıra hallarda çoxobrazlı üzərində $\{\partial_i\}$ təbii reperinə deyil, hər bir nöqtədə xətti asılı olmayan n sayda $e_i(x)$ vektor meydanlarından təşkil olunmuş daha ümumi növ reperə baxıl-ması zərurəti yaranır. Belə reperlərə qeyri-holonom reperlər deyilir.

$$\left[e_i, e_j\right] = R_{ij}^k(x)e_k \qquad (5.6)$$

qəbul edərək, qeyri-holonom reperin struktur tənliyini alarıq. $R_{ij}^k -$ qeyri-holonomluq obyekti adlanır. Qeyd edək ki, qeyri-holonomluq obyekti tenzor deyildir. Qoşma $\left\{e^i(x)\right\} : e^i(e_j) = \delta_j^i$ koreperi

$$de^k = -\frac{1}{2}R_{ij}^k e^i \Lambda e^j \qquad (5.7)$$

struktur tənliklərini ödəyir.

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k \qquad (5.8)$$

qəbul etməklə, qeyri-holonom reperdə rabitə əmsallarını alarıq. Bu halda kovariant törəmə

$$\nabla_i v^k = e_i(v^k) + \Gamma_{ij}^k v^j \qquad (5.9)$$

şəklində yazılır və buruqluq tenzoru

$$S_{ij}^k = 2\Gamma_{[ij]}^k - R_{ij}^k \qquad (5.10)$$

ifadəsinə malik olur.

(M, g) psevdo-Riman fəzası halında buruqluq sıfra bəra-bərdir, lakin bu heç də $\Gamma_{[ij]}^k = \frac{1}{2}R_{ij}^k$ rabitə əmsallarının simmet-rikliyini göstərmir. Metrik tenzorun kovariant törəməsinin sabit-liyindən alınır ki,

$$\begin{aligned} \Gamma_{kij} &= \frac{1}{2}\left(e_i\left(g_{jk}\right) + e_j\left(g_{ik}\right) - e_k\left(g_{ij}\right)\right) + \\ &\frac{1}{2}\left(R_{kij} + R_{jki} - R_{ijk}\right), \end{aligned} \qquad (5.11)$$

burada $\Gamma_{kij} = g_{ks}\Gamma^{s}_{ij}, \quad R_{kij} = g_{ks}R^{s}_{ij}.$

(5.11) düsturu (5.2) düsturunun ümumiləşməsidir. (M, g) fəza-sında daha çox ortonormallaşmış qeyri-holonom reperlərdən istifadə olunur: $g(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j, \quad g(e_i, e_i) = \pm 1$. Bu halda metrika

$$ds^2 = (e^1)^2 + \cdots + (e^p)^2 - \cdots - (e^n)^2$$

şəklinə gətirilir və (5.11) düsturuna əsasən rabitə əmsalları üçün

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left(R_{kij} + R_{jki} - R_{ijk}\right) \qquad (5.12)$$

ifadəsi doğru olur.

Mühazirə 13

Metrika ilə əlaqələndirilmiş afin rabitə

Qeyd olunduğu kimi, X_n diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində Riman metrikası $(0,2)$ tipli simmetrik, cırlaşmayan (qeyri-məxsusi) kovarinat g_{ij} tenzor meydanının verilməsi ilə təyin edilir. Fərz edək ki, X_n diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində g_{ij} Riman metrikası və simmetrik $\nabla = \{\Gamma^i_{kj}\}$ afin rabitəsi ($\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}$ və ya $S^i_{kj} = 0$) verilmişdir.

Əgər g_{ij} metrikası və $\nabla = \{\Gamma^i_{kj}\}$ simmetrik afin rabitəsi üçün $\nabla_k g_{ij} = 0$ şərti ödənilərsə, onda ∇ afin rabitəsinə g_{ij} metrikası ilə əlaqələndirilmiş afin rabitə (və ya Levi-Çivita rabitəsi) deyilir. Levi-Çivita rabitəsinə Riman rabitəsi də deyirlər. Levi-Çivita rabitəsinin varlığı və yeganəliyinə dair aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem1.1. Tutaq ki, $g_{ij} - X_n$ çoxobrazlısı üzərində Riman metrikasıdır. Onda g_{ij} metrikası ilə əlaqələndırılmış yeganə simmetrik afin rabitə vardır və bu rabitənin əmsalları

$$\Gamma^i_{kj} = \frac{1}{2} g^{i\alpha}\left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^\alpha}\right) \qquad (1)$$

düsturları ilə hesablanır.

<u>İsbatı.</u> Fərz edək ki, Riman rabitəsinin varlığı isbat olunmuşdur. Bu rabitənin yeganəliyini əsaslandıraq. Tərifə görə

$$\nabla_k g_{ij} = 0 .$$

∇ afin rabitəsi Γ^i_{kj} rabitə əmsalları ilə verildiyindən göstərmək kifayətdir ki, Γ^i_{kj} əmsalları (1) sistemindən g_{ij} komponentlərinin və $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}$ xüsusi törəmələrinin funksiyaları kimi birqiymətli təyin olunur. (1) sistemini açıq şəkildə yazaq:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\alpha_{ki} g_{\alpha j} - \Gamma^\alpha_{kj} g_{\alpha j} = 0$$

və ya

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} = \Gamma^\alpha_{ki} g_{\alpha j} + \Gamma^\alpha_{kj} g_{\alpha j} . \tag{2}$$

(2) bərabərliyinin hər iki tərəfində ardıcıl olaraq iki dəfə i, j və k indekslərinin yerini saat əqrəbi istiqamətində dəyişək:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma^\alpha_{ij} g_{\alpha k} + \Gamma^\alpha_{ik} g_{j\alpha} , \tag{3}$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma^\alpha_{jk} g_{\alpha i} + \Gamma^\alpha_{ji} g_{k\alpha} \tag{4}$$

(3) və (4) bərabərliklərini tərəf- tərəfə toplayaraq, alınmış bərabərlikdən (2) bərabərliyini tərəf-tərəfə çıxaq və bu zaman ∇ afin rabitəsinin simmetrikliyini nəzərə alaq:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 2\Gamma^\alpha_{ij} g_{\alpha k} \tag{5}$$

Qeyd edək ki, g_{ij} metrik tenzor meydanı üçün $\|g_{ij}\|$ qeyri-məxsusi matris olduğundan bu matrisin

$$g_{i\alpha}\, g^{\alpha k} = \delta_i^k = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i \end{cases}$$

(6)

münasibəti ilə qurulan $\left\| g^{\alpha k} \right\|$ tərs matrisi X_n çoxobrazlısı üzərində $(2{,}0)$ tipli tenzor meydanı təyin edir. (5) bərabərliyinin hər iki tərəfini g^{ke} komponentlərinə vuraq və bu zaman (6) münasibətini nəzərə alaq:

$$2\Gamma_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k} g^{ke} = 2\Gamma_{ij}^{\alpha} \delta_{\alpha}^{e} = 2\Gamma_{ij}^{e} = g^{ke}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

və ya

$$\Gamma_{ij}^{e} = \frac{1}{2} g^{ke}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

Beləliklə, biz göstərdik ki, əgər Levi-Çivita rabitəsi vardırsa, onda bu rabitə yeganədir. Levi-Çivita rabitəsinin varlığının isbatı üçün Γ_{kj}^{i} əmsallarını yuxarıda qeyd olunan düsturlarla təyin etmək kifayətdir. Aydındır ki, bu halda eyni hesablamaları tərs nizamda aparmaqla $\nabla_k g_{ij} = 0$ nəticəsinə gəlmək olar. Bu isə teoremin isbatı deməkdir.

Mühazirə 14

Paralel köçürmə

Tutaq ki, $M-$hamar çoxobrazlıdır, $\gamma : I \to M - M$ üzərində hamar əyridir.

γ əyrisi boyunca vektor meydanı dedikdə hər bir $t \in I$ nöqtəsinə $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ toxunan vektorunu qarşı qoyan $X : t \to X(t)$ inikası başa düşülür.

Tutaq ki, M çoxobrazlısı üzərində ∇ afin rabitəsi verilmişdir və Γ_{ij}^{k} –rabitə funksiyalarıdır. Əgər $X(t)-\gamma(t)$ əyrisi boyunca hamar vektor meydanıdırsa, onda $\nabla_{T_\gamma(t)}X(t)=\nabla_{T_\gamma}X(t)$ kovariant törəməsini təyin etmək mümkündür.

∇ afin rabitəsinə malik hamar M çoxobrazlısı üzərində γ hamar əyrisi boyunca verilmiş $X(t)$ vektor meydanı $\nabla_{T_\gamma}X(t)=0$ bərabərliyi ödənildikdə γ əyrisi boyunca paralel vektor meydanı adlanır.

γ əyrisinin obrazı (U,φ) lokal xəritəsinin oblastında yerləşdikdə, $T_\gamma(t)=\frac{du^i(t)}{dt}\partial_{i_{\gamma(t)}}$ olur. Əgər $X(t)=f^i(t)\partial_{i_{\gamma(t)}}$ -γ əyrisi boyunca verilmiş vektor meydanıdırsa, onda $X(t)$ vektor meydanı yalnız və yalnız

$$\frac{df^k(t)}{dt}+\frac{du^i(t)}{dt}f^j(t)\Gamma_{ij}^{k}(\gamma(t))=0 \tag{1}$$

münasibəti ödənildikdə γ əyrisi boyunca paralel olur. Qeyd edək ki, (1) sistemi $f^k(t)$ funksiyalarına nəzərən adi xətti diferensial tənliklər sistemidir.

γ əyrisi boyunca t_0 nöqtəsindən t_1 nöqtəsinə paralel köçürmə dedikdə

$$\|\gamma_{t_1}^{t_0}:T_{\gamma(t_0)}M\to T_{\gamma(t_1)}M:X_0\to X(t_1)$$

Inikası başa düşülür, burada $X(t)-\gamma$ əyrisi boyunca elə paralel vektor meydanıdır ki, $X(t_0)=X_0$.

Tutaq ki, ∇ afin rabitəsinə malik M hamar çoxobrazlısı üzərində γ əyrisi verilmişdir. Əgər $T_\gamma(t)$ toxunan vektor meydanı γ əyrisi boyunca paraleldirsə, yəni $\nabla_{T_\gamma}T_\gamma(t)=0$ şərti ödənilirsə, onda γ geodezik əyri adlanır.

Teorem. İxtiyari $P_0 \in M$ nöqtəsi və ixtiyari toxunan $X_0 \in T_{P_0}M$ vektoru üçün $\varepsilon > 0$ ədədi və elə yeganə $\gamma :]-\varepsilon;\varepsilon[\to M$ geodezik xətti vardır ki, $\gamma(0) = P_0, T_\gamma(0) = X_0$.

Mühazirə 15
Afin rabitənin əyrilik tenzoru

∇ afin rabitəsinin buruqluq tenzoru dedikdə aşağıdakı münasibətlə təyin olunan (1,2) tipli tenzor başa düşülür:

$$S(V,U) = \nabla_V U - \nabla_U V - [V,U] \quad , \quad \forall U,V \in X(M)$$

burada, $[\mathscr{V},U]$ - V və U vektor meydanlarının kommutatoru və ya $\mathscr{L}_i$ mötərizəsidir. Kommutator dedikdə aşağıdakı münasibətlə təyin olunan meydanı başa düşülür:

$$[V,U](f) = \mathscr{V}(U(f)) - U(\mathscr{V}(f)),$$

burada $f \in F(M)$, $U(f) = U^i \partial_i f$. $[V,U]$ kommutatorunun koordinantlarını hesablayaq. Bundan ötrü $V = \mathscr{V}^i \partial_i$ və $U = U^j \partial_j$ olduğunu nəzərə alaq:

$$[V,U](f) = V(U(f)) - U(V(f)) = V\left(U^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - U\left(V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) =$$

$$= \mathscr{V}^i\left(U^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - U^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \left(\mathscr{V}^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(U^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - U^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\right) =$$

$$= \mathscr{V}^i\left(U^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - U^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \left(\mathscr{V}^i \frac{\partial U^i}{\partial x^i} - U^j \frac{\partial \mathscr{V}^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial f}{\partial x^i} =$$

$$= \left(\mathscr{V}^m \partial_m U^i - U^m \partial_m \mathscr{V}^i\right)\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Buradan aydın olur ki, $[V,U]$ vektor meydanı

$$[V,U]^i = \mathscr{V}^m \partial_m U^i - U^m \partial_m \mathscr{V}^i$$

komponentlərinə malikdir.

Buruqluq tenzorunun koordinantlarını ∇ rabitəsinin əmsalları ilə ifadə etmək mümkündür. Doğurdan da, əgər V və U vektor meydanlarını ∂_i və ∂_j koordinant vektor meydanları ilə əvəz etsək, yaza bilərik:

$$S(\partial_i,\partial_j)=S_{ij}^k\partial_k=\nabla_{\partial_i}\partial_j-\nabla_{\partial_j}\partial_i-[\partial_i,\partial_j]=\Gamma_{ij}^k\partial_k-\Gamma_{ji}^k\partial_k-$$

$$-\left(\delta_i^m\partial_m\delta_j^k-\delta_j^m\partial_m\delta_i^k\right)\partial_k=\left(\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k\right)\partial_k$$

Bu bərabərlikdən müəyyən edirik:

$$S_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k.$$

∇ afin rabitəsinin əyrilik tenzoru dedikdə aşağıdakı münasibətə təyin olunan (1,3) tipli tenzor meydanı başa düşülür:

$$R(U,V,W)=\nabla_{\mathscr{V}}\nabla_U W-\nabla_U\nabla_V W-\nabla_{[V,U]}W\ ,\quad \forall\ \mathscr{V},U,W\in X(M).$$

Əyrilik tenzorunun komponentlərini təyin etmək üçün $\mathscr{V},U,W$ vektor meydanlarını uyğun olaraq, $\partial_i,\partial_j,\partial_k$ koordinant vektor meydanları ilə əvəz edək:

$$R(\partial_i,\partial_j,\partial_k)=R_{ij\ k}^{e}\partial_e=\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k-\nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k-\nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k=\nabla_{\partial_i}\left(\Gamma_{jk}^m\partial_m\right)-\nabla_{\partial_j}\left(\Gamma_{ik}^m\partial_m\right)=$$

$$=\partial_i\Gamma_{jk}^m\,\partial_m+\Gamma_{jk}^m\nabla_{\partial_i}\partial_m-\partial_j\Gamma_{ik}^m\,\partial_m-\Gamma_{ik}^m\nabla_{\partial_j}\partial_m=$$

$$=\partial_i\Gamma_{jk}^m\,\partial_m+\Gamma_{jk}^m\,\Gamma_{im}^e\partial_e-\partial_j\Gamma_{ik}^m\,\partial_m-\Gamma_{ik}^m\,\Gamma_{jm}^e\partial_e=$$

$$=\left(\partial_i\Gamma_{jk}^e-\partial_j\Gamma_{ik}^e+\Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^e-\Gamma_{ik}^m\Gamma_{jm}^e\right)\partial_e.$$

Bu münasibətdən aydın olur ki, əyrilik tenzoru aşağıdakı komponentlərə malikdir ([12, səh 188]):

$$R_{ijk}^e=\partial_i\Gamma_{jk}^e-\partial_j\Gamma_{ik}^e+\Gamma_{im}^e\,\Gamma_{jk}^m-\Gamma_{jm}^e\,\Gamma_{ik}^m\ .$$